evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0556
Tematická oblast: Analytická geometrie
Dílčí téma: vzájemná poloha přímek v prostoru
Výukový materiál
VY _ 42_INOVACE_RI_MA_19
Autor : Mgr. Šárka Říhová
Škola : SPŠ a VOŠ Příbram

Vzájemná poloha dvou přímek

v prostoru

V prostoru mohou mít 2 přímky p,q tyto vzájemné polohy:

1) ROVNOBĚŽKY - a) SHODNÉ $p \cap q = p \text{ nebo } q$

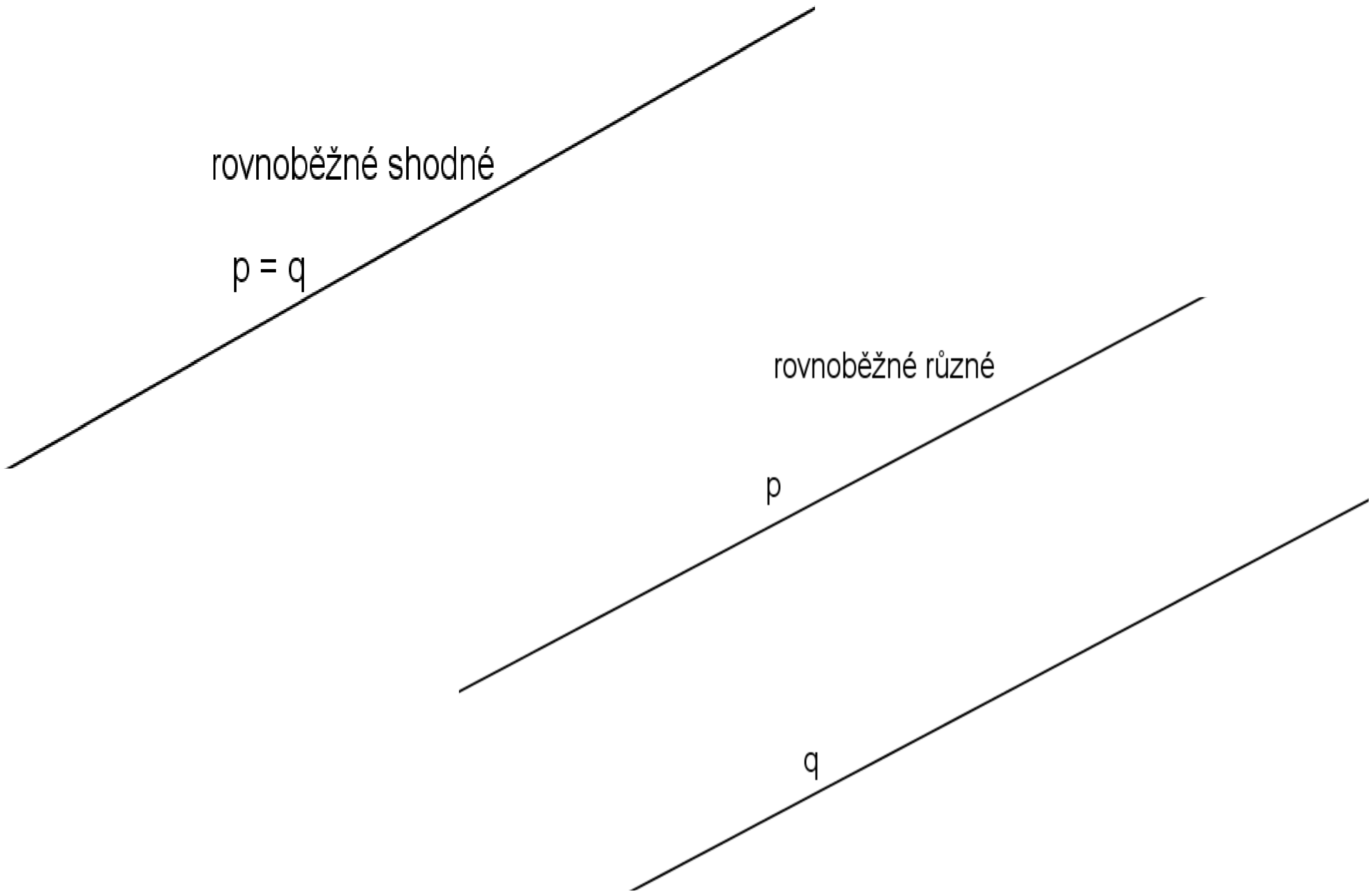
b) RŮZNÉ $p \cap q = ø$

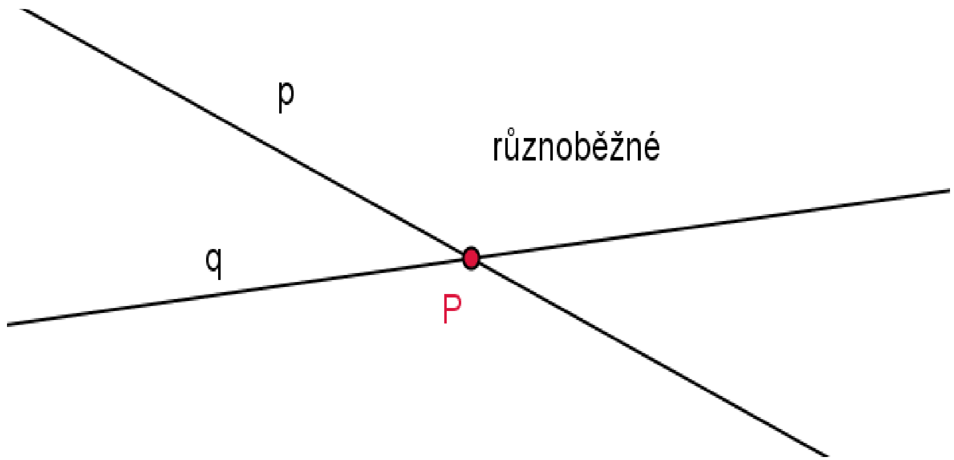
2) RŮZNOBĚŽKY - pak mají jeden společný bod – PRŮSEČÍK P

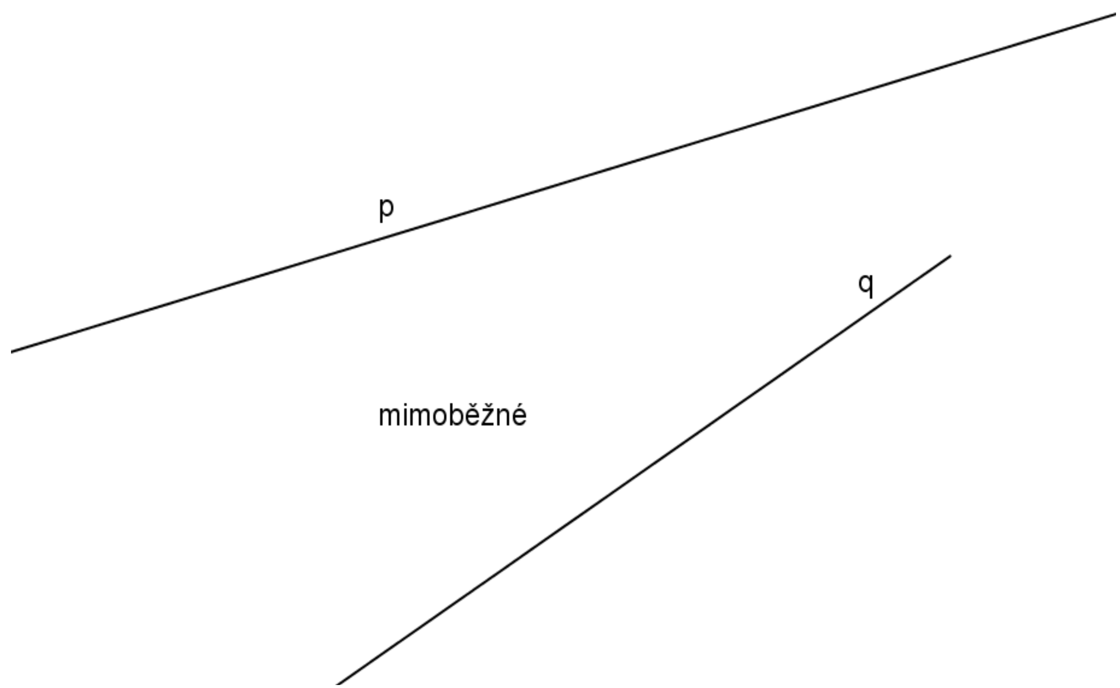
POZOR:

kolmost je jen jeden zvláštní případ různoběžnosti !

3) MIMOBĚŽKY - nejsou rovnoběžné a NEMAJÍ společné body


rovnoběžné shodné
p = q
rovnoběžné různé
p
q


p
různoběžné
q
P


p
q
mimoběžné

Přímka může být zadaná v prostoru POUZE PARAMETRICKY – budeme tedy pracovat se SMĚROVÝMI vektory. Postupujeme takto :

1) Vyloučíme nebo potvrdíme ROVNOBĚŽNOST (pomocí lineární závislosti směrových vektorů)

2) V případě ROVNOBĚŽNOSTI určíme, zda jsou přímky SHODNÉ, či RŮZNÉ (již umíme – pomocí jednoho bodu – totéž, co v rovině) JSME HOTOVI !!!

3) V případě, že NEJSOU ROVNOBĚŽNÉ postupujeme dále , protože musíme rozhodnout, zda jsou RŮZNOBĚŽNÉ nebo MIMOBĚŽNÉ

Uděláme to takto: Budeme předpokládat, že mají společný bod P (že jsou různoběžné).

- Jestliže to matematicky potvrdíme (soustava má řešení – tj. má spol. bod), jsou opravdu RŮZNOBĚŽNÉ ! A můžeme dopočítat průsečík P.

- V případě že to vyvrátíme (soustava rovnic nemá řešení – tj. spol. bod neexistuje), přímky nemohou být různoběžné a musí být MIMOBĚŽNÉ.

- Pozor!!! Toto vyžaduje zběhlost při řešení rovnic a soustav rovnic!!!!!!

  Bez znalosti řešení soustav rovnic tyto úlohy nevyřešíte!

Př.1.: Určete vzájemnou polohu přímek p a q.

$$p: x = 3 - 2t \quad y = 1 + 8t \quad z = 4 + 6t$$

$$q: x = -1 + s \quad y = 3 - 4s \quad z = 5 - 3s$$

Vypíšeme si směrové vektory :

$\boxed{\vec{u}_p = (-2; 8; 6)}$ $\boxed{\vec{u}_q = (1; -4; -3)}$

Vidíme, že jsou lineárně závislé – přímky jsou ROVNOBĚŽNÉ.
Pomocí jednoho bodu, např. P = [3; 1; 4] z přímky p , rozhodneme o shodnosti, či různosti.

P dosadíme do q: $3 = -1 + s \Rightarrow s = 4$

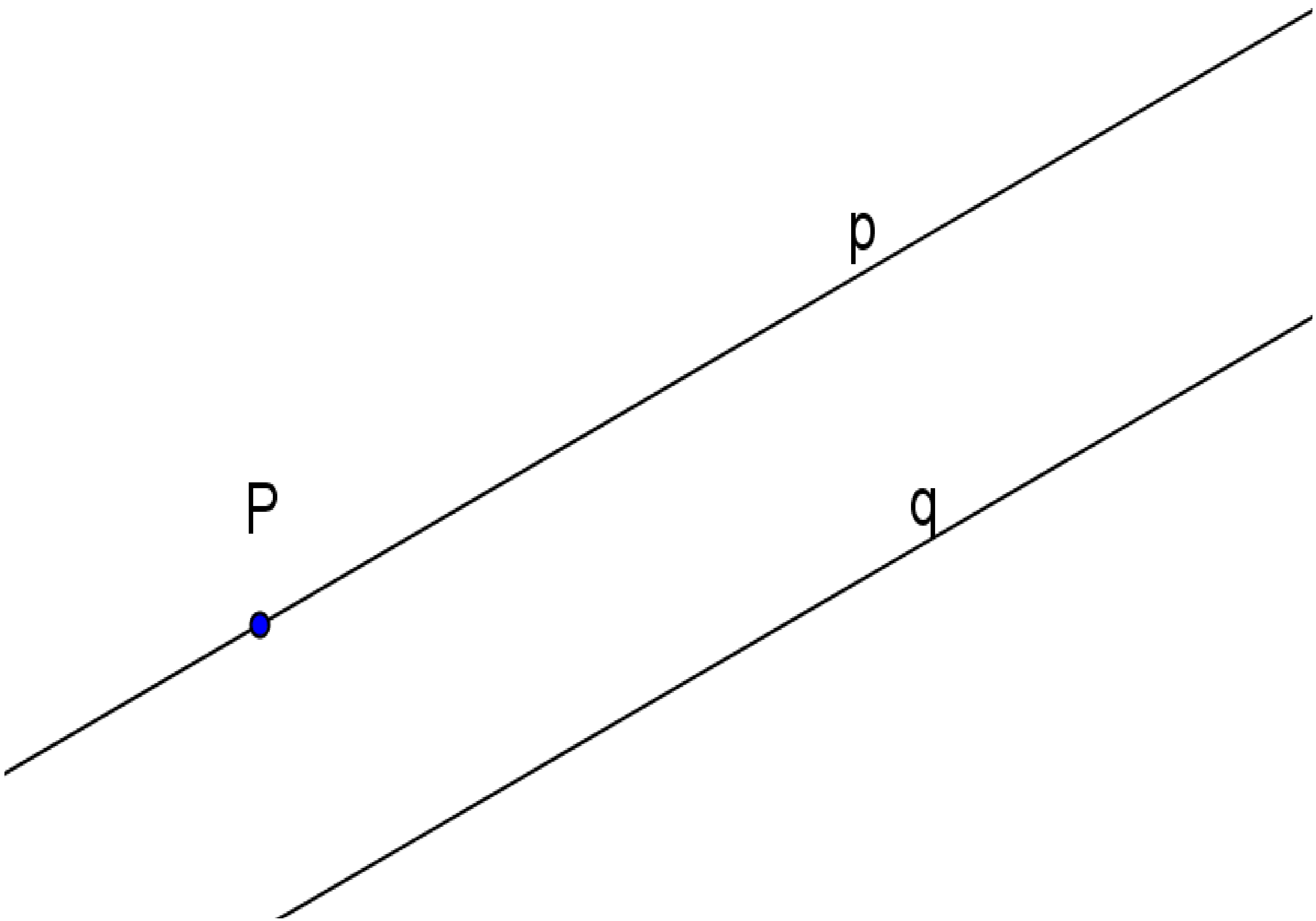
$$1 = 3 - 4s \Rightarrow -2 = -4s \Rightarrow s = \tfrac{1}{2}$$

$4 \neq \frac{1}{2}$

$P \notin q$

Dál již počítat nemusíme, vidíme, že přímky nejsou shodné – jsou ROVNOBĚŽNÉ RŮZNÉ

Zdůvodněte na obrázku:



Př.2.: Určete vzájemnou polohu přímek a, b.

$$a: x = 3 + 3t \qquad b: x = 2 - s$$
$$y = -1 + t \qquad y = 1 + s$$
$$z = 4 + 5t \qquad z = 3 - 2s$$

Směrové vektory jsou:

$\boxed{\vec{u}_a = (3; 1; 5)}$ $\boxed{\vec{u}_b = (-1; 1; -2)}$

Protože jsou lineárně nezávislé, musíme rozhodnout mezi RŮZNOBĚŽKAMI a MIMOBĚŽKAMI. Předpokládáme společný bod P (různoběžky).

P leží na p i q, můžeme tedy přímky „dát do rovnosti“.

$$3 + 3t = 2 - s$$
$$-1 + t = 1 + s$$
$$4 + 5t = 3 - 2s$$

Vznikla soustava 3 rovnic o 2 neznámých (t,s)

Umíme řešit soustavu, kde je více neznámých než rovnic?

Umíme řešit soustavu, kde je více rovnic než neznámých?

Vybereme si 2 kterékoliv rovnice, soustavu vyřešíme, ale pokud soustava řešení má, musí toto řešení vyhovovat VŠEM TŘEM ROVNICÍM !
(tj. zkouška musí vyjít pro všechny 3 rovnice)
Jinak soustava řešení nemá – nemá společný bod.

Vyberu si 1. a 2. rovnici:

$$3+3t=2-s$$
$$-1+t=1+s \quad \Rightarrow t=2+s \quad \Rightarrow t=2-\frac{7}{4}=\frac{1}{4}$$

Zvolím dosazovací metodu – z 2. rovnice vyjádřím t.

Dosadím do 1. rovnice: $3+6+3s=2-s$

$$4s=-7$$

$$\boxed{s=-\frac{7}{4}}$$

Dopočítám t: $\boxed{t=\frac{1}{4}}$

t i s musí vyhovovat i 3. rovnici: $4+5t=3-2s$

$$L: 4+5\cdot\frac{1}{4}=\frac{16+5}{4}=\frac{21}{4} \qquad P: 3-2\cdot\left(-\frac{7}{4}\right)=\frac{12+14}{4}=\frac{26}{4}$$

$$\boxed{L\neq P}$$

Celá soustava 3 rovnic NEMÁ ŘEŠENÍ – NEMÁ SPOL. BOD

- jedná se o MIMOBĚŽKY

Př.3.: Určete vzájemnou polohu přímek a, b

$$a: x = 6 + 3t \qquad b: x = 7 + 2s$$
$$y = 0 + t \qquad y = 1 + s$$
$$z = 9 + 5t \qquad z = 8 + 2s$$

Směrové vektory: $\boxed{\vec{u}_a = (3;1;5) \quad \vec{u}_b = (2;1;2)}$

jsou nezávislé - přímky nejsou rovnoběžné.

Předpokládáme společný bod – „dáme přímky do rovnosti“

$$6 + 3t = 7 + 2s$$
$$0 + t = 1 + s \qquad \Rightarrow t = 1 - 2 = -1$$
$$9 + 5t = 8 + 2s$$

Řešíme první dvě rovnice. 2. dosadím do první: $6 + 3 + 3s = 7 + 2s$

$$9 + s = 7$$

dopočítám t : $t = -1$

$s = -2$

Vyzkoušíme, zda t a s vyhovují i 3. rovnici: $9+5t=8+2s$

$L: 9+5\cdot(-1)=\boxed{4}$ $P: 8+2\cdot(-2)=\boxed{4}$ $\boxed{L=P}$

To znamená, že společný bod existuje (můžeme ho vypočítat) – a , b jsou RŮZNOBĚŽKY.

Výpočet průsečíku: dosadím parametr t nebo s do jedné z přímek:

Např. t do přímky a : $x=6+3\cdot(-1)=3$ $t=-1$

$y=-1$

$z=9+5\cdot(-1)=4$

$\boxed{P=[3;-1;4]}$

Naše RŮZNOBĚŽKY mají průsečík : $P=[3;-1;4]$

- Co nám vyjde, když dosadíme parametr s do přímky b ?

$$b: x = 7 + 2s$$
$$y = 1 + s$$
$$z = 8 + 2s$$

$$s = -2$$

OVĚŘTE