evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0556
Tematická oblast: Analytická geometrie
Dílčí téma: obecná rovnice roviny
Výukový materiál
VY _ 42_INOVACE_RI_MA_16
Autor : Mgr. Šárka Říhová
Škola : SPŠ a VOŠ Příbram

Obecná rovnice

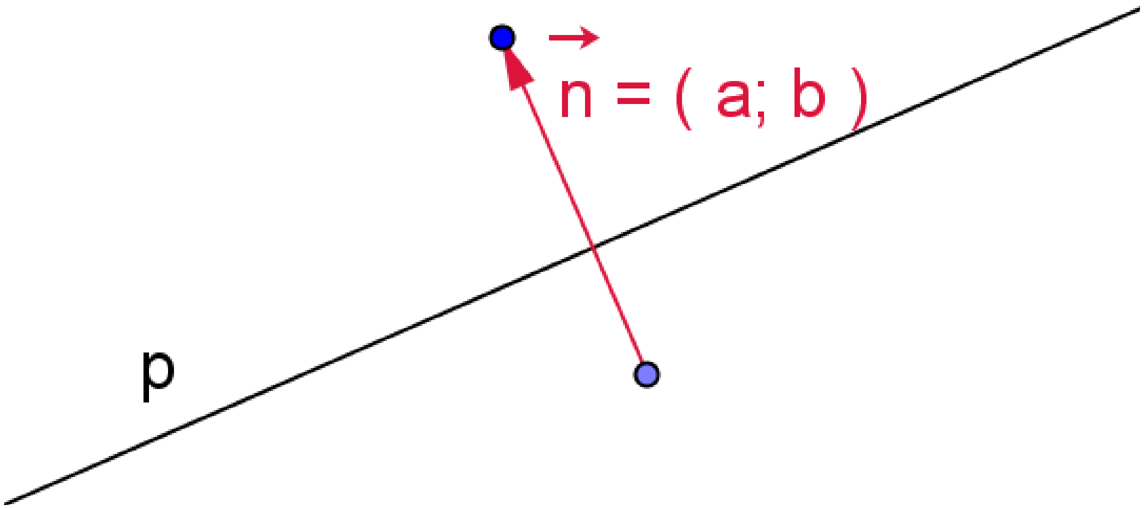
roviny

OPAKOVÁNÍ

Co vyjadřuje rovnice: $ax + by + c = 0$?

Co vyjadřují písmena a,b ? Co vyjadřují písmena x,y ?

Jak vypočteme písmeno c ?



NOVÁ LÁTKA

- Obdobně jako v minulé látce lze v analytické geometrii odvodit rovnici:

$$ax + by + cz + d = 0$$

- NENÍ to však obecná rovnice přímky v prostoru (pozor na tuto častou chybu!!!).

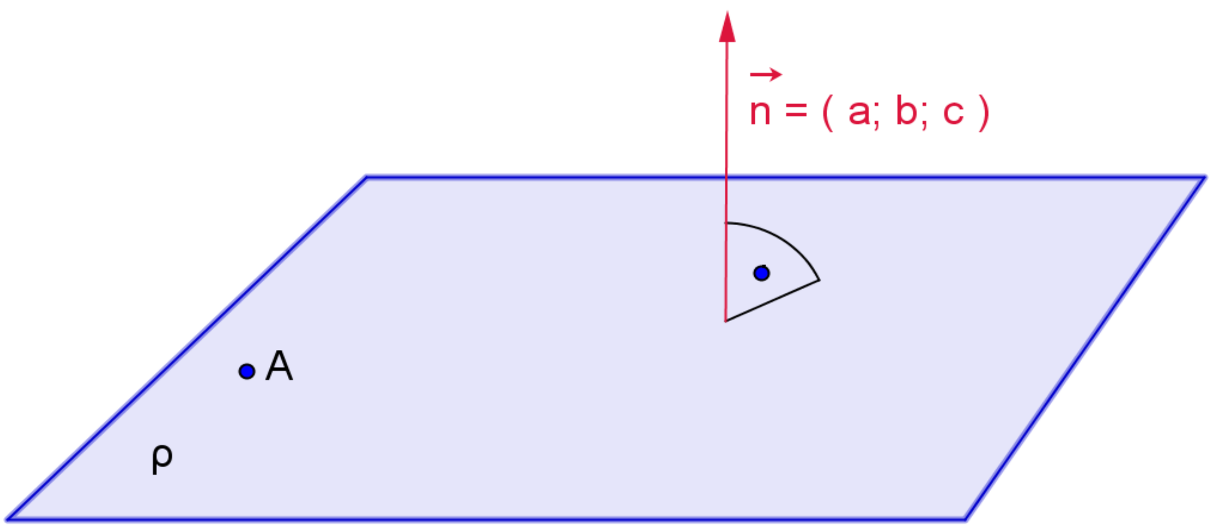
- Je to OBECNÁ ROVNICE ROVINY

- a,b,c - složky NORMÁLOVÉHO (kolmého) VEKTORU
- x,y,z - souřadnice jakéhokoliv BODU dané ROVINY

- d - vypočteme obdobně jako u přímky dosazením bodu a normálového vektoru.

Pro obecnou rovnici $ax + by + cz + d = 0$ roviny potřebujeme:

- 1)Jeden bod dané roviny
- 2)Jeden vektor na ní kolmý-NORMÁLOVÝ



Př.1. Zapište obecnou rovnici roviny, která prochází bodem A = [3; 7; -2] a je kolmá na vektor $\boxed{\vec{n} = (1;\, 6; -4\,)}$

Co potřebujeme?

1)Jeden bod roviny – máme - A = [3; 7; -2]

2) Vektor kolmý – NORMÁLOVÝ – máme

Stačí tedy jen dosadit do obecné rovnice:

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$1 \cdot 3 + 6 \cdot 7 - 4 \cdot (-2) + d = 0$$

$$3 + 42 + 8 + d = 0$$

a dopočítat d

$$\boxed{d = -53}$$

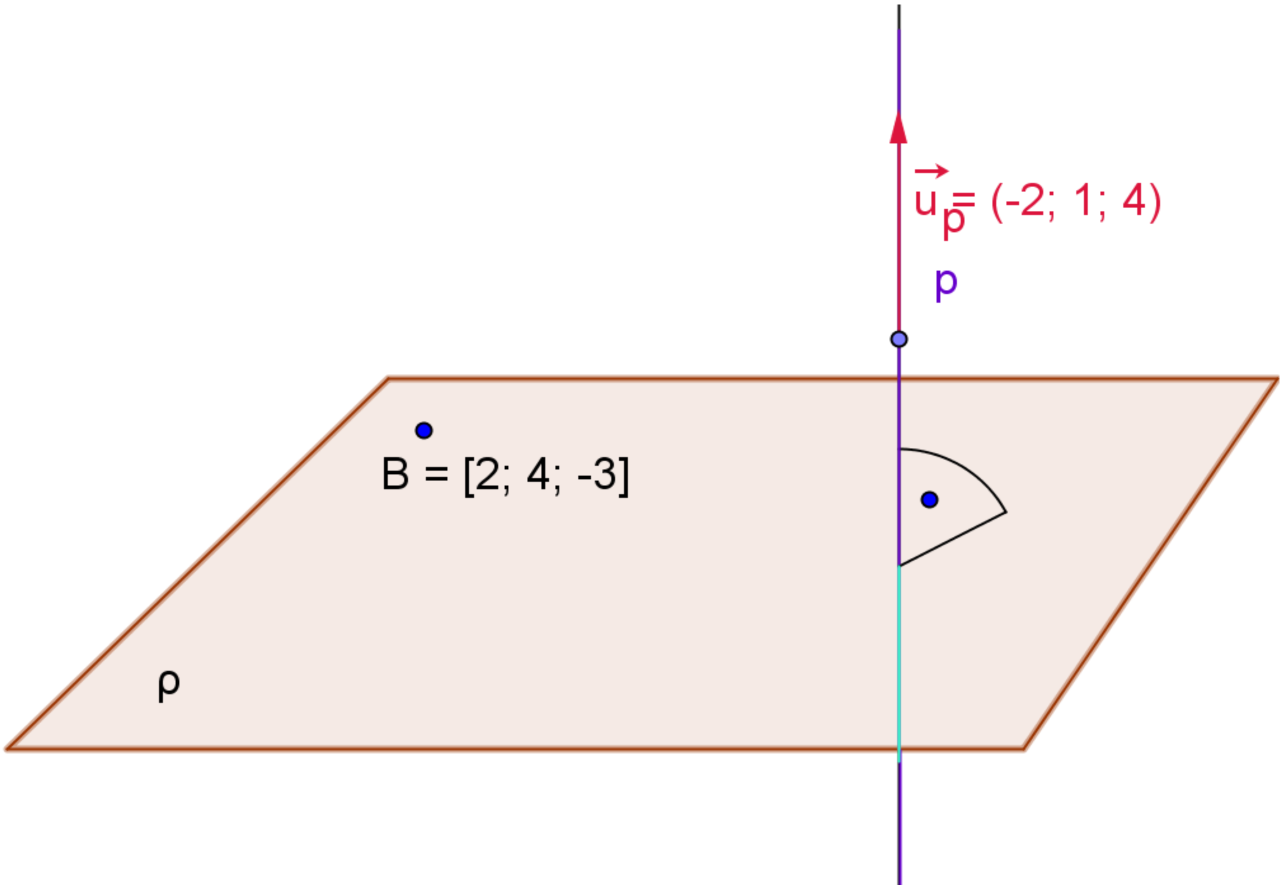
Nyní zapíšeme obecnou rovnici naší roviny:

$$\boxed{x + 6y - 4z - 53 = 0}$$

Př.2. Zapište obecnou rovnici roviny, která je kolmá na přímku p a prochází bodem B = [2; 4; -3].

$$p: x = 1 - 2t$$
$$y = -4 + t$$
$$z = 5 + 4t$$

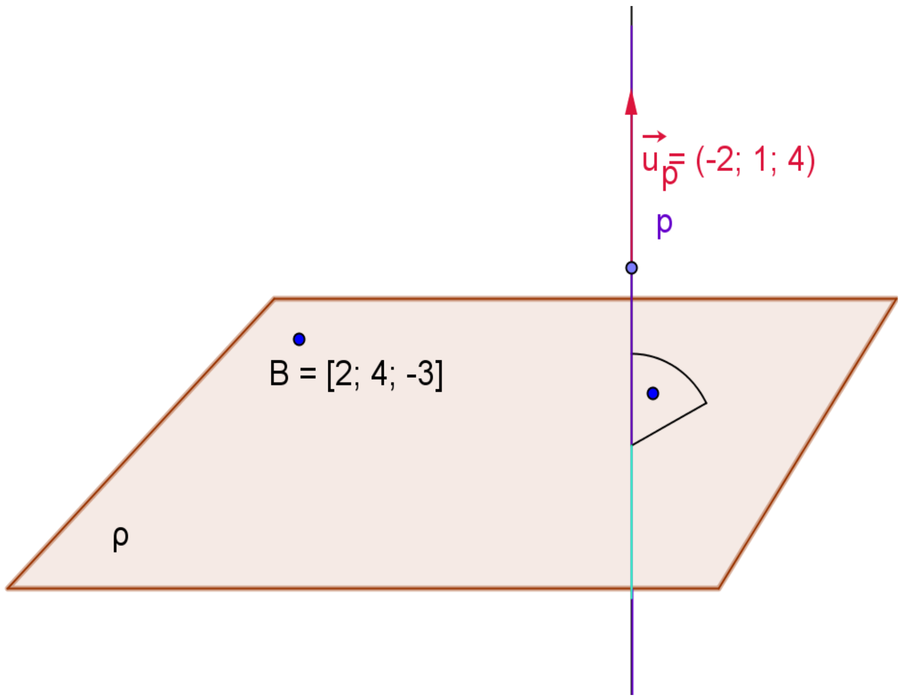
Situaci si představme - načrtněte obrázek:



Co potřebujeme?

1)Jeden bod roviny – máme - B = [2; 4; -3]

2) Vektor na rovinu kolmý – NORMÁLOVÝ - lze použít vektor směrový přímky p!



V našem případě je

$$\boxed{\vec{n}_\rho = \vec{u}_p = (-2; 1; 4)}$$

Dosadíme bod B a vektor normálový do obecné rovnice:

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$-2\cdot 2+1\cdot 4+4\cdot\left(-3\right)+d=0$$

$$-4+4-12+d=0$$

$$\boxed{d=12}$$

Nyní zapíšeme obecnou rovnici naší roviny:

$$-2x+y+4z+12=0$$

Neboli:

$$\boxed{2x-y-4z-12=0}$$

Př.3.: Zapište obecnou rovnici roviny ABC: A = [1;1;-3]
B = [5; -2; 3] C = [9; 1; 4]

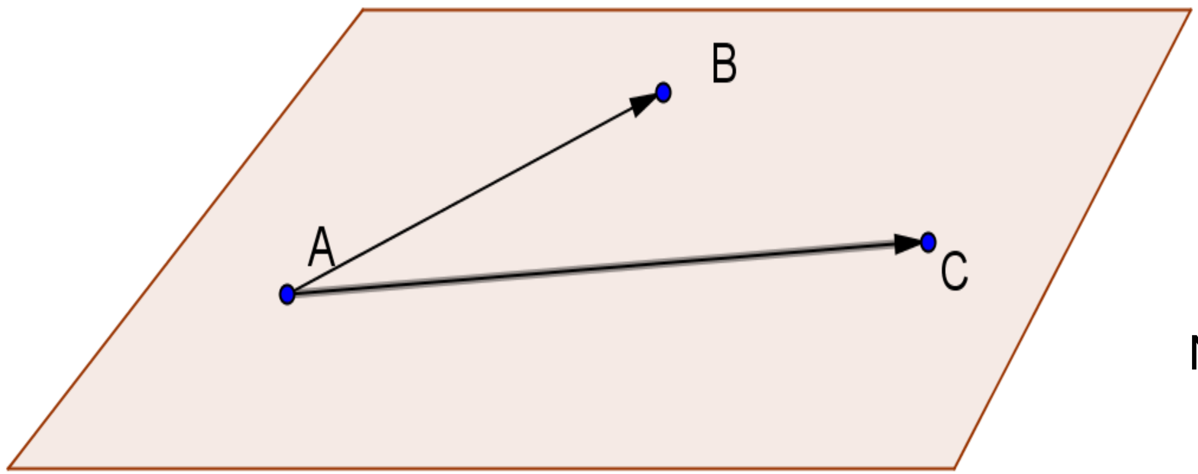
Co potřebujeme?

1) Jeden bod roviny – máme dokonce tři – je jedno, který použijeme

2) Vektor na rovinu kolmý – normálový

NEMÁME!!

Můžeme si vytvořit pomocí bodů A,B,C vektory v rovině – vektory směrové – ROVNOBĚŽNÉ.



A = [1;1;-3]

B = [5; -2; 3]

Např. $\boxed{\vec{u}_{AB} = (4;-3;6)}$

Můžeme i zapsat pomocí skalárního součinu k danému vektoru vektor kolmý

Takto: Máme vektor rovnoběžný : $\vec{u}_{AB} = (4;-3;6)$

Vektor kolmý může být jakýkoliv, který má s původním skalární součin roven 0.

Volíme tedy dvě složky a třetí dopočítáme.

Volíme např.: $\boxed{\vec{n}_{AB} = (1;1;n_3)}$

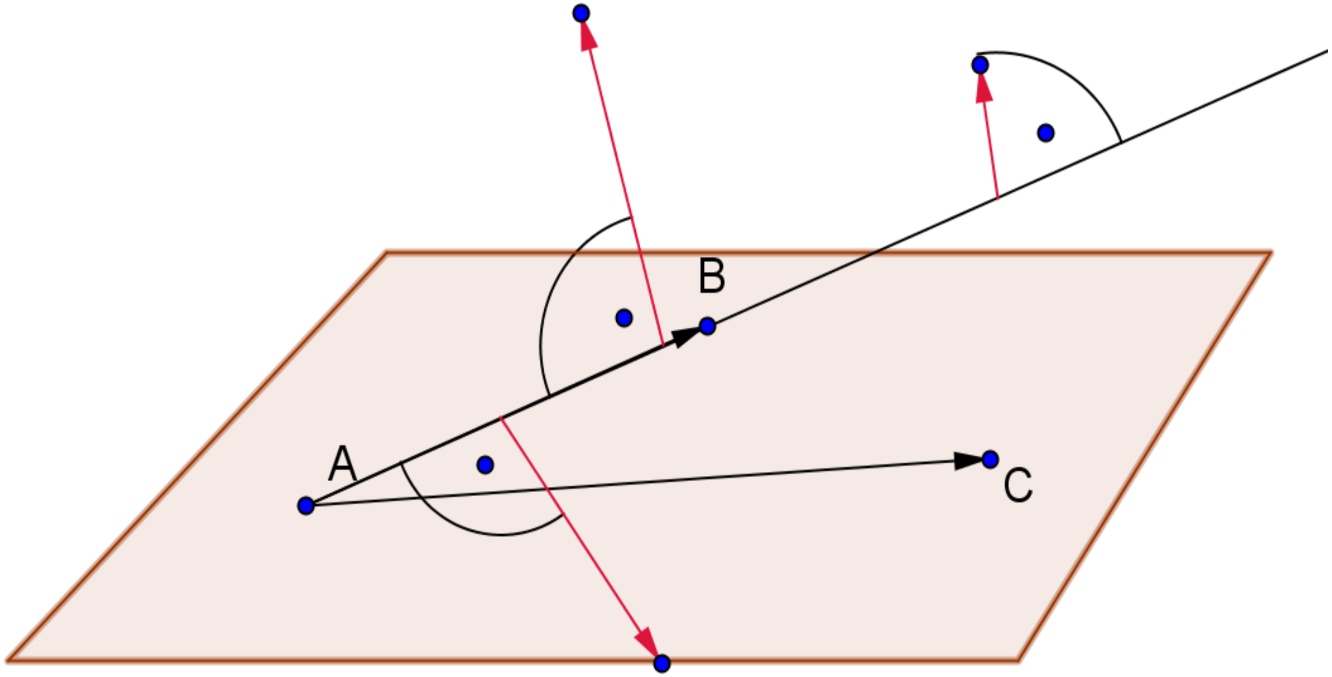
Dosadíme do skalárního součinu: $\vec{n}_{AB} \cdot \vec{u}_{AB} = 1 \cdot 4 + 1 \cdot (-3) + n_3 \cdot 6$

$$0 = 1 + 6n_3$$

$$n_3 = -\frac{1}{6}$$

Vektor kolmý na AB je : $\boxed{\vec{n}_{AB} = \left(1; 1; -\frac{1}{6}\right)}$

Ale bude vektor $\vec{n}_{AB}$ kolmý na přímku AB, také kolmý na naší rovinu???



Takových vektorů je nekonečně mnoho a byla by to velmi málo pravděpodobná náhoda, že se „trefíme“ do vektoru současně kolmého jak na přímku, tak i na rovinu.

Normálový vektor roviny pomocí skalárního součinu tedy neurčíme.

Budeme muset dosazovat VŠECHNY body do obecné rovnice – a to příště.